# 数学在计算机辅助几何设计中的应用

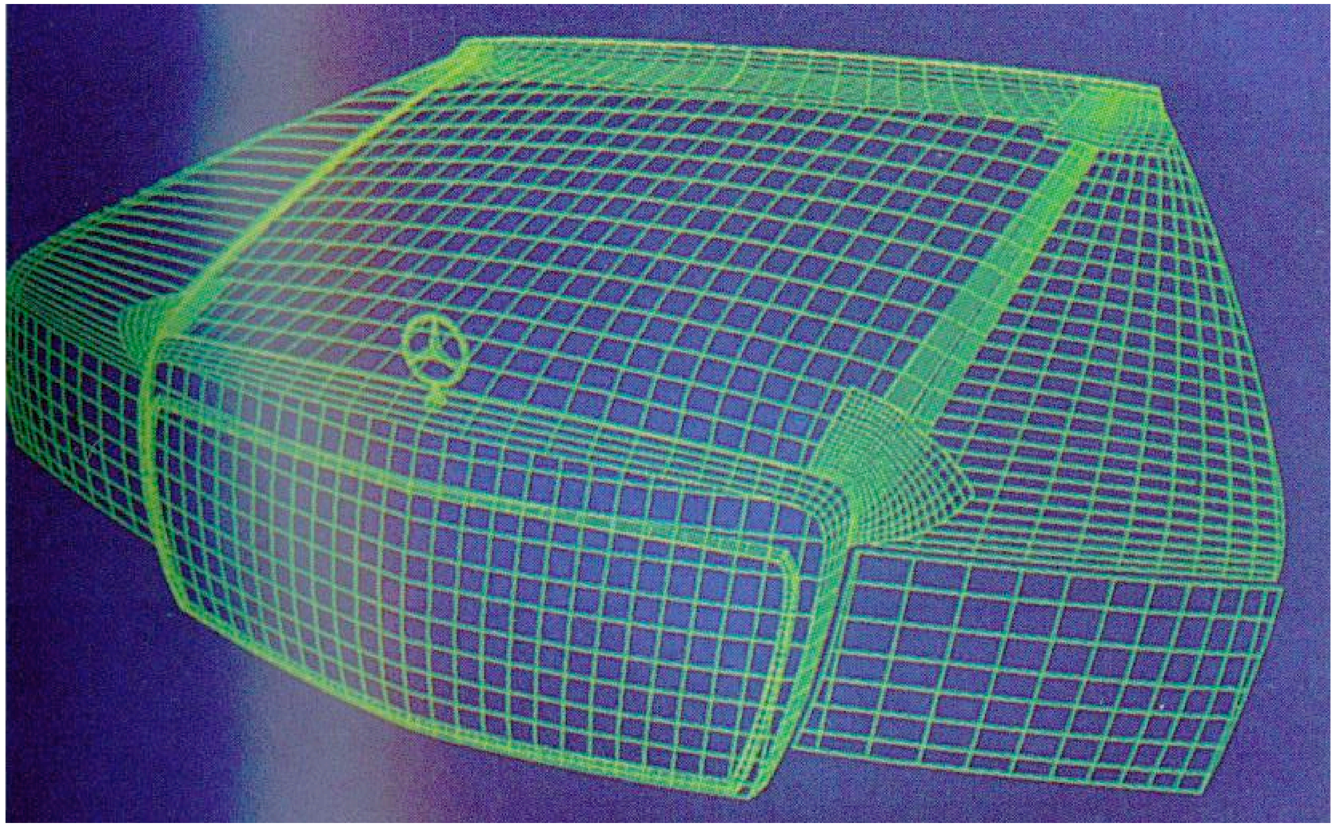
**陈 琪**

卡尔斯鲁厄大学
Universität Karlsruhe (TH)

GCMA和GCWD联合年会，2007年11月24－25日，Karlsruhe

# 计算机辅助几何设计的研究对象

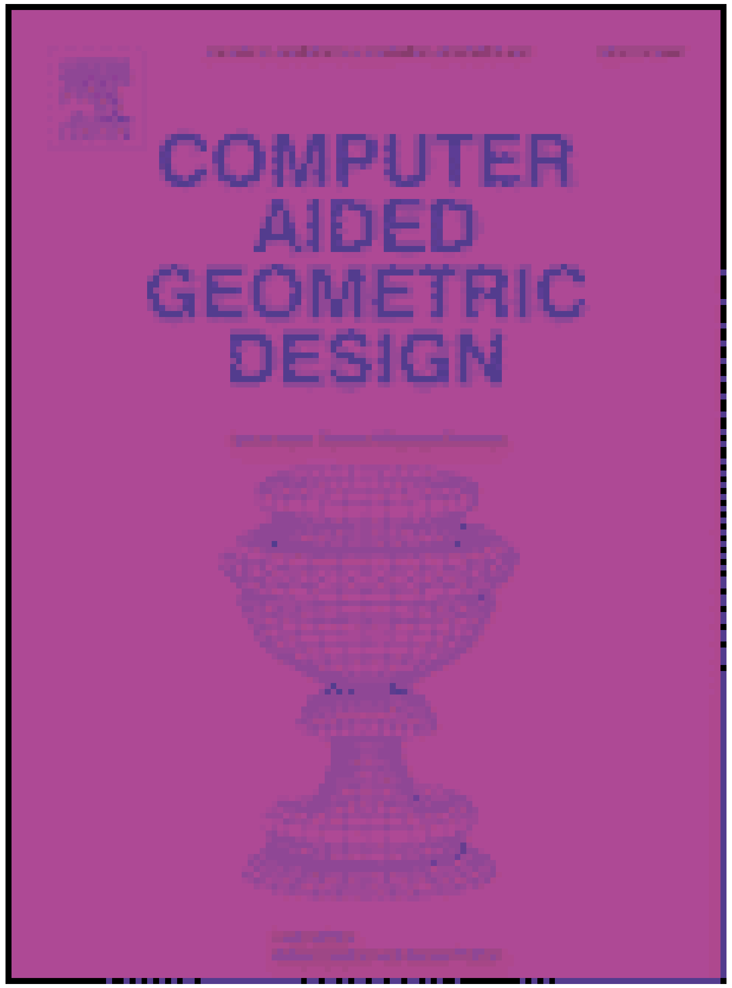
- **C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign: CAGD
- 起源于船舶、飞机和汽车制造工业中的几何外形设计问题



- 曲线和曲面信息的表示、逼近、分析、设计和重构

# 计算机辅助几何设计的发展历史

- 20世纪60年代：Coons技术和Bézier技术
- 20世纪70年代：B样条(B-Spline)技术
- 1974年Barnhill和Riesenfeld在Utah大学的会议中首次提出CAGD
- 1979年Faux和Pratt：“Computational Geometry for Design and Manufacture”
- 1981年苏步青和刘鼎元：《计算几何》
- 1984年Barnhill和Boehm创立“Computer Aided Geometric Design”杂志



# 计算机辅助几何设计的发展历史

- 以逼近、插值、拟合三种研究手段为骨架的几何理论体系
- 研究对象的扩展：
  - 曲面变形、曲面重建、曲面简化、曲面转换等
- 与CAGD密切相关的学科：
  - 微分几何、代数几何、线性代数、数值分析、
  - 应用逼近论、拓扑学、微分方程、分形小波、
  - 算法理论、数据结构、程序语言、
  - 计算机图形学、机械加工、外形检测等

# 曲线和曲面的表示方式和研究方法（1）

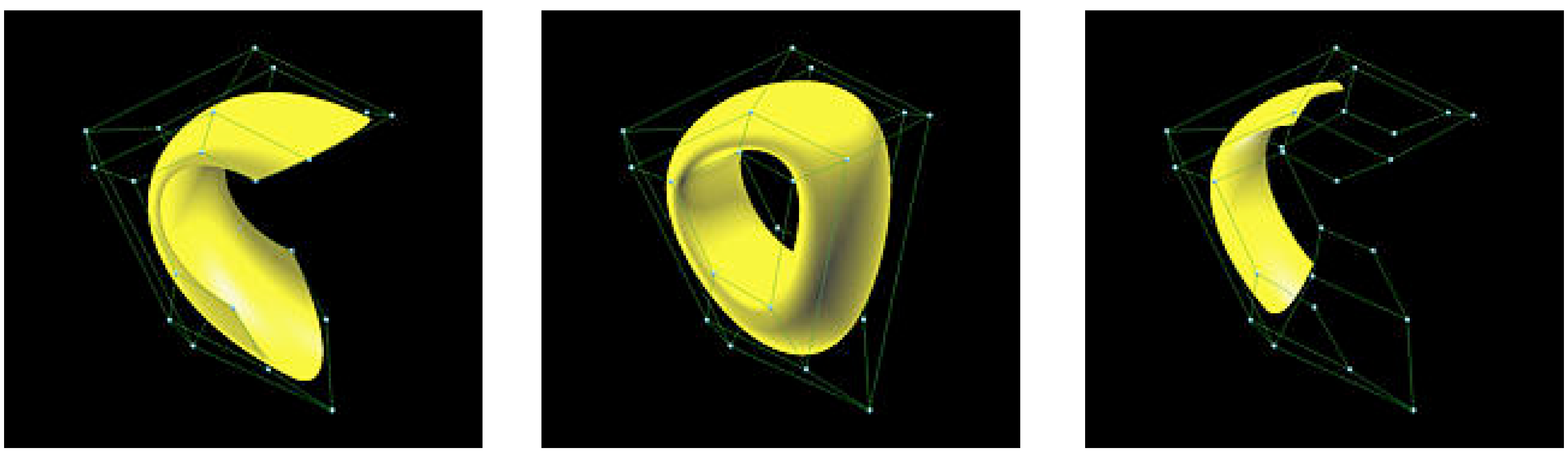
- 参数化表示(Parameterization)

- Bézier表示 和 有理Bézier表示

- B样条(B-Splines)，有理B样条(Rational B-Splines)

- 非均匀B样条(Non-Uniform B-Splines)

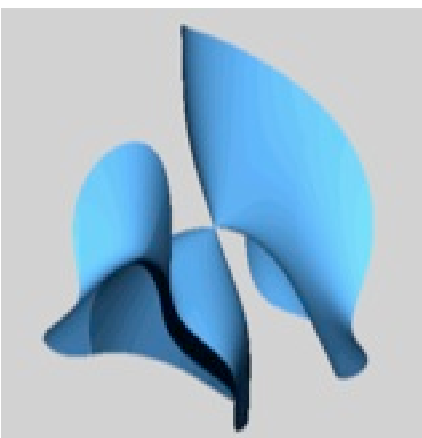
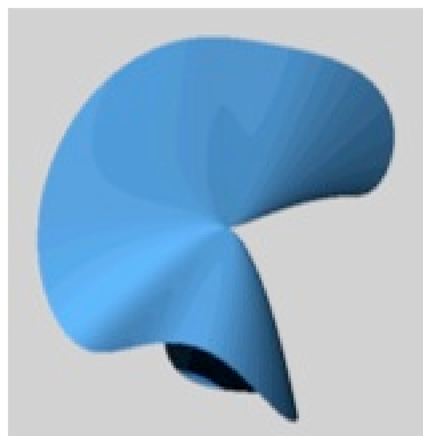
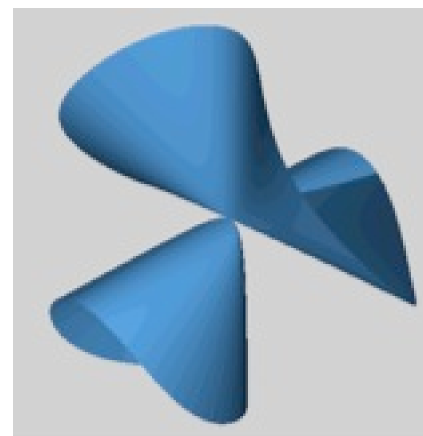
- 非均匀有理B样条(NURBS: Non-Uniform Rational B-Splines)



Clamped, Closed and Open B-spline Surfaces

# 曲线和曲面的表示方式和研究方法（2）

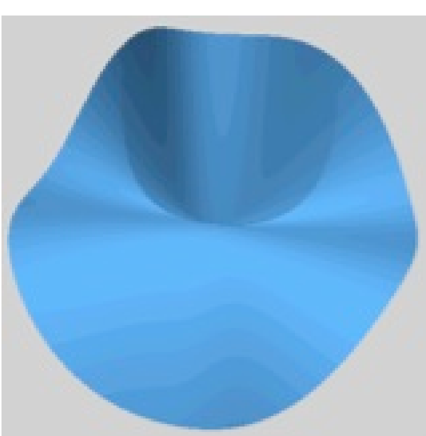
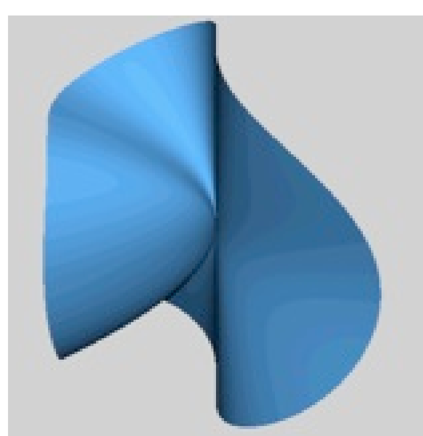
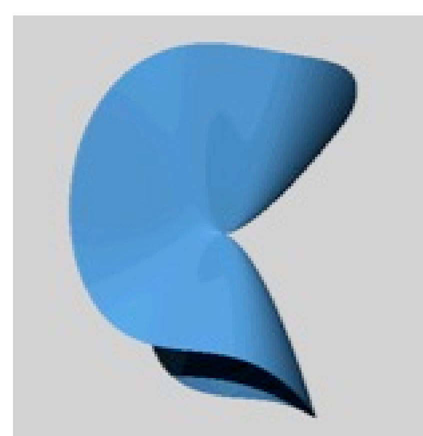
- 隐式的代数曲面表示(Implicit Algebraic Surface Representation)
  - 以代数几何为研究手段

$$(xy + xz + yz) + xyz = 0$$

$$xz + xy^2 + y^3 = 0$$

$$xz + (x + z)y^2 = 0$$

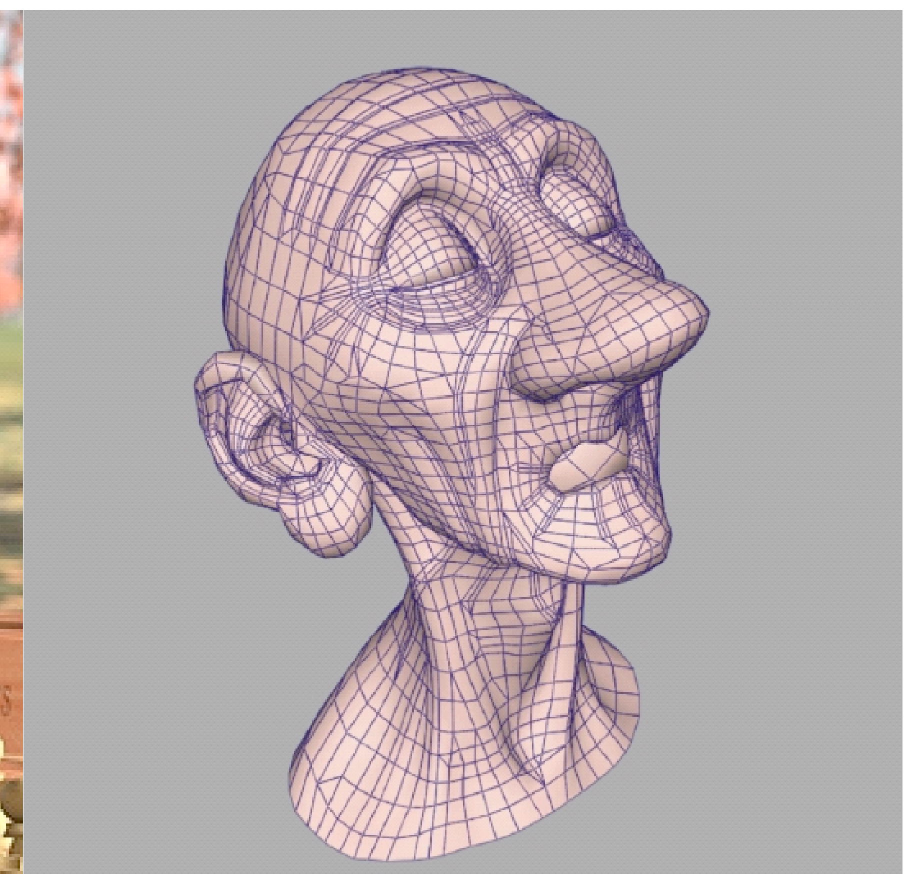
$$xz + y^2z + x^3 = 0$$

$$x^2 + xz^2 + y^3 = 0$$

$$xz + y^3 = 0$$

# 曲线和曲面的表示方式和研究方法（3）

- 曲线和曲面的离散型表示方式
  - 网格细分法(Subdivision)
  - 点集(point cloud)表示法，离散几何

# 曲线的Bézier表示法

多项式曲线的表示方法

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} B_0(t) + \cdots + \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} B_n(t)$$

1. 通常的表示方法

$$B_k(t) = t^k, \quad k = 1, \ldots, n$$

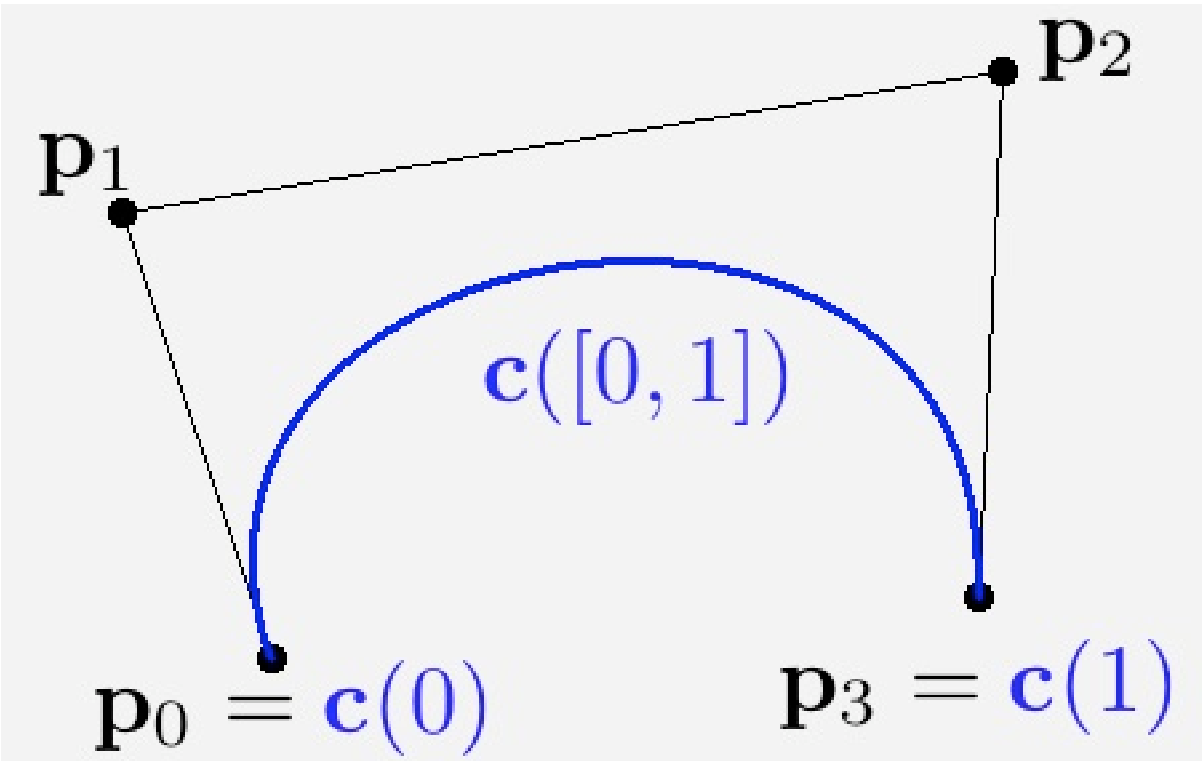
2. Bézier表示方法

$$B_k(t) = B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

# Bézier曲线的性质

以三次Bézier曲线为例(n=3):

$$\mathbf{c}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_0} B_0^3(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_1} B_1^3(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_2} B_2^3(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_3} B_3^3(t)$$

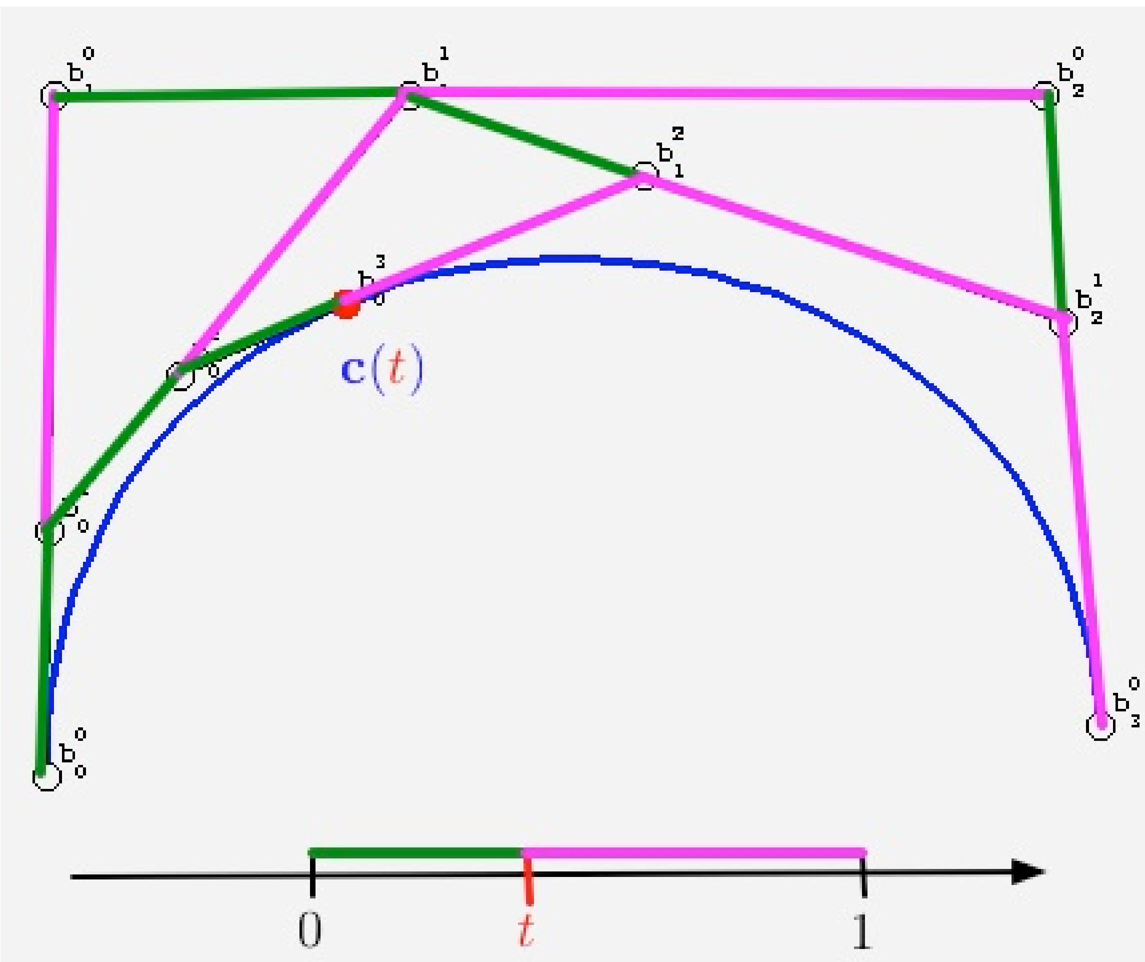



- 端点插值性
- 端点切线
- $\sum_k B_k^n \equiv 1 \Rightarrow$仿射不变性
- $B_k^n(t) \geq 0, \forall t \in [0,1] \Rightarrow$凸包性
- 特征造型性

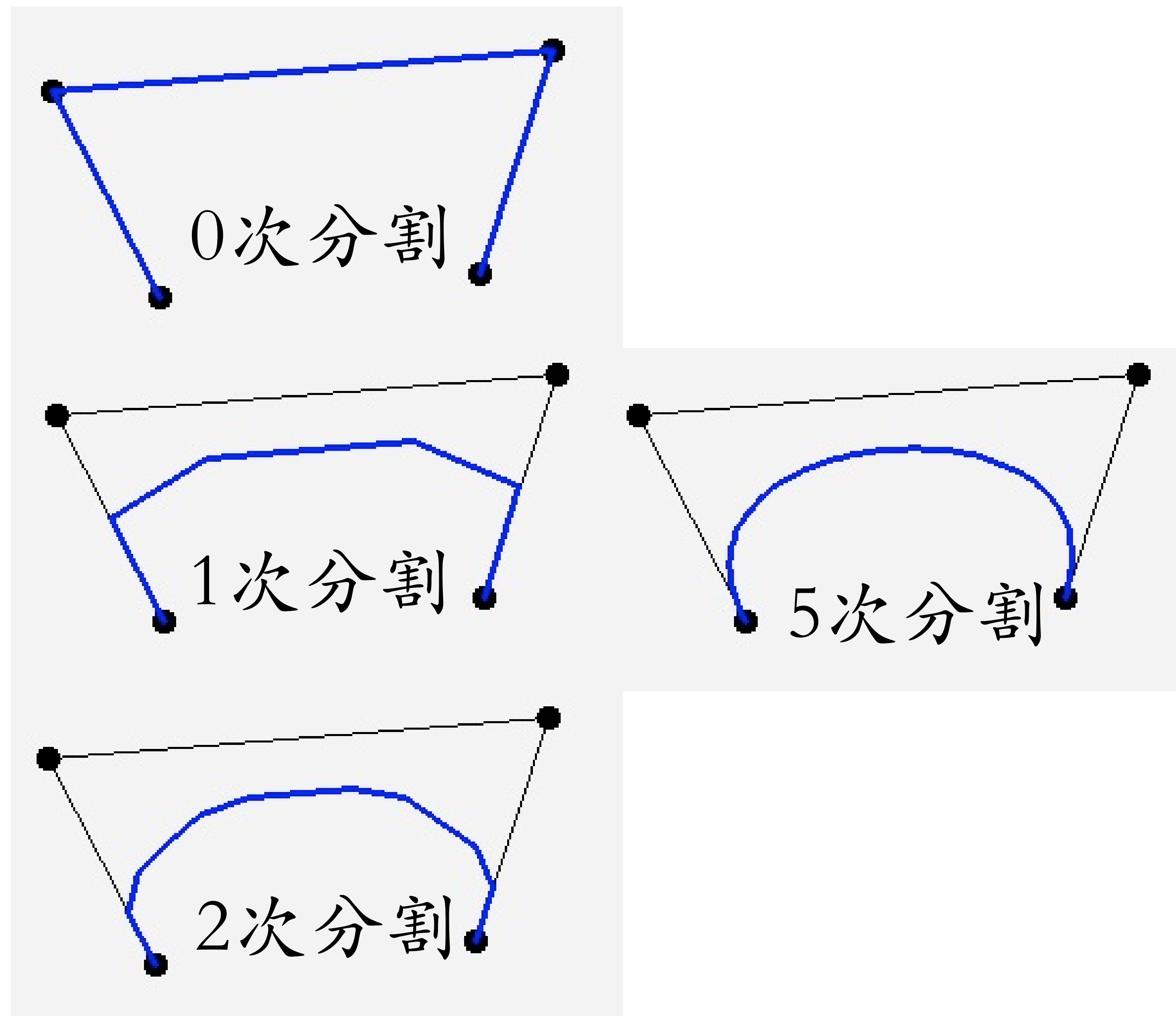
# Bézier曲线的计算机生成

$$\mathbf{c}(t) = b_0^0 B_0^3(t) + b_1^0 B_1^3(t) + b_2^0 B_2^3(t) + b_3^0 B_3^3(t)$$

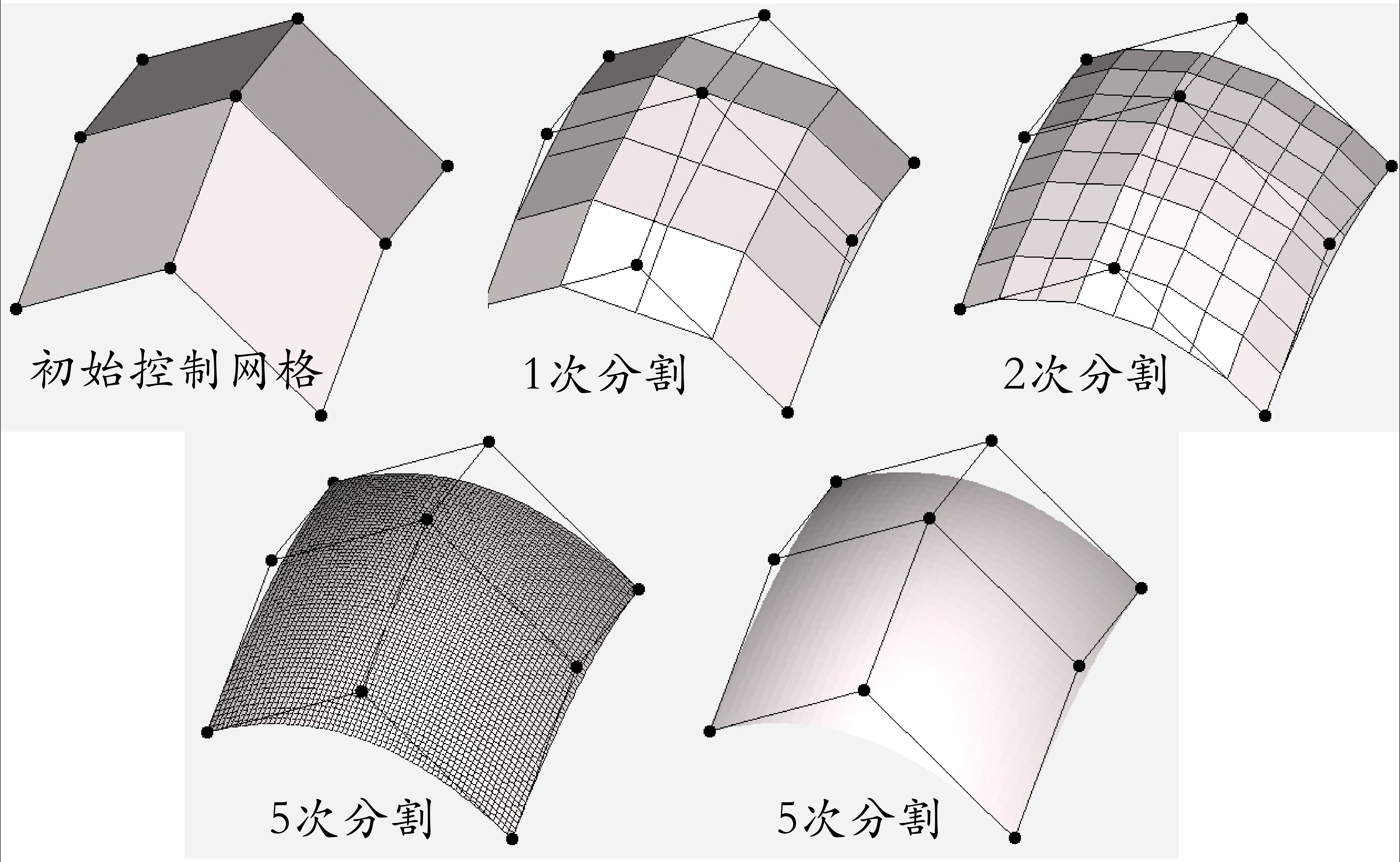
de Casteljau算法




取中点，分割控制多边形
生成近似曲线

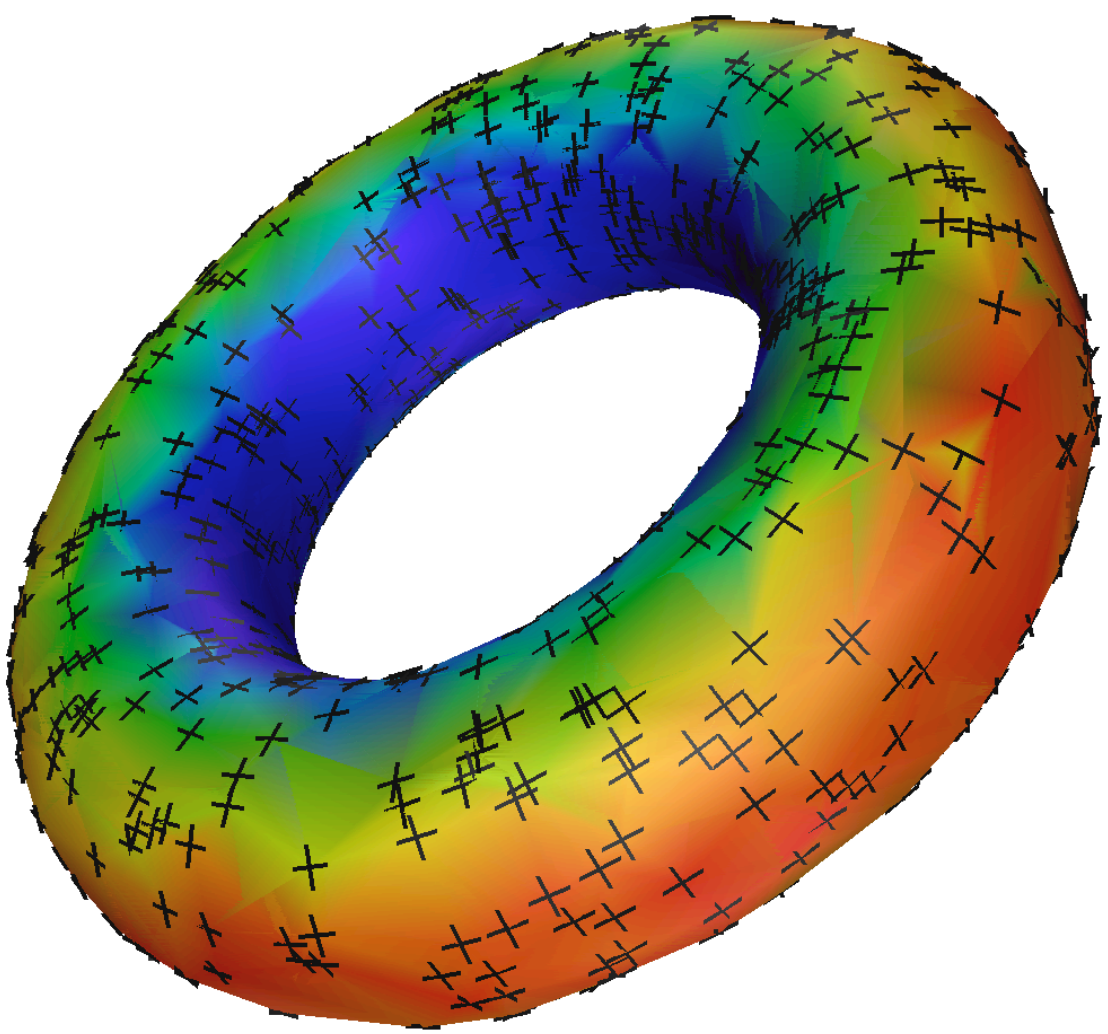


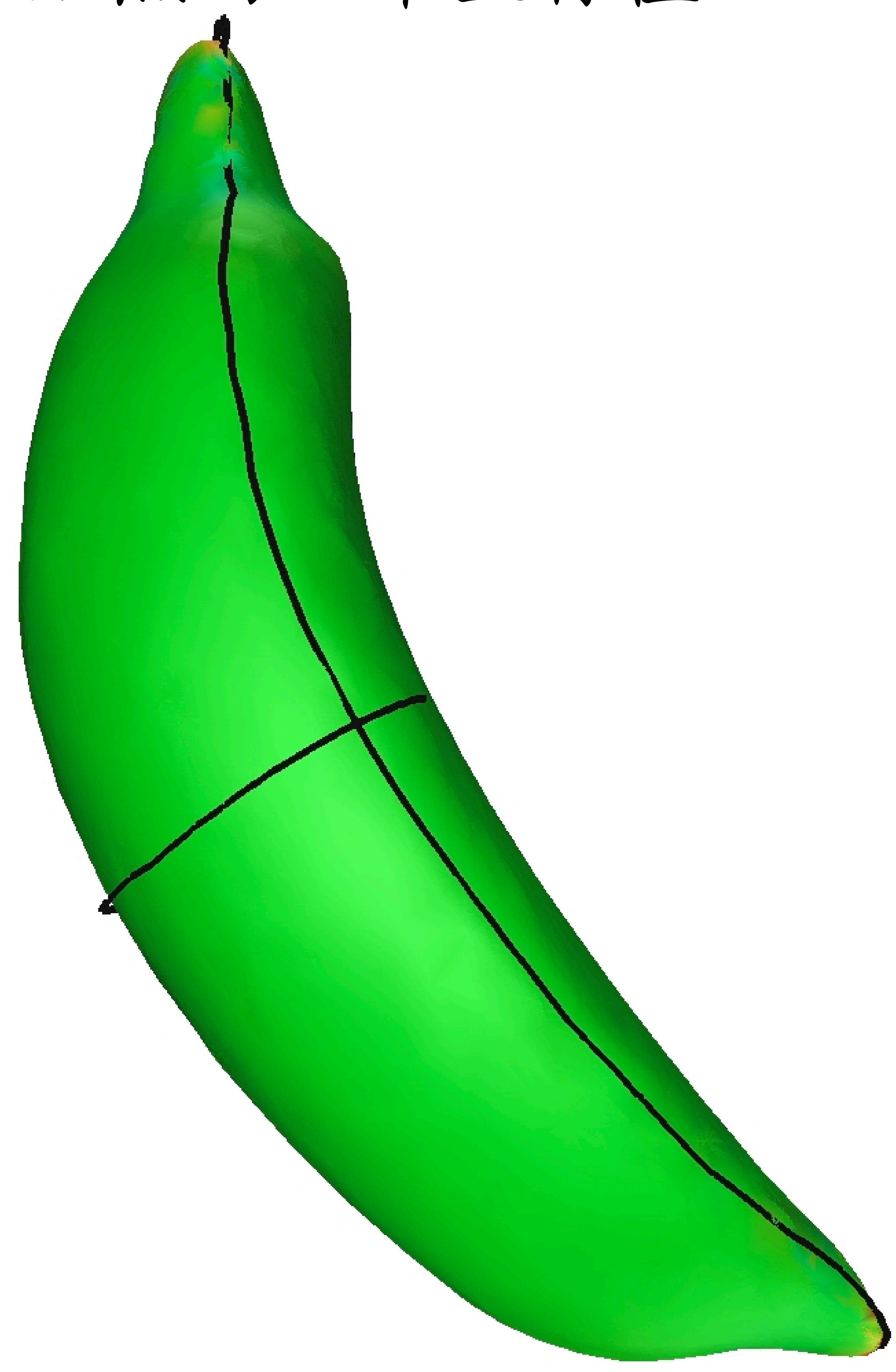
# Bézier曲面



# 实例一：计算并显示物体表面的特征信息

- 输入：物体表面一些点的信息，如点的三维坐标值
- 输出：
  1. 近似的物体表面
  2. 物体表面的曲率和曲率线





# 曲率和曲率方向的计算

- 连续法：二次曲面逼近法

  1. 对曲面上一点及其附近的若干点用一个二次曲面逼近

  $$\mathbf{F}(u,v) = \mathbf{f} + u\,\mathbf{f}_u + v\,\mathbf{f}_v + \frac{u^2}{2}\,\mathbf{f}_{uu} + uv\,\mathbf{f}_{uv} + \frac{v^2}{2}\,\mathbf{f}_{vv}$$

  2. 计算二次曲面在相关点的第二基本式
  3. 计算Weingarten-矩阵和它的特征值、特征向量

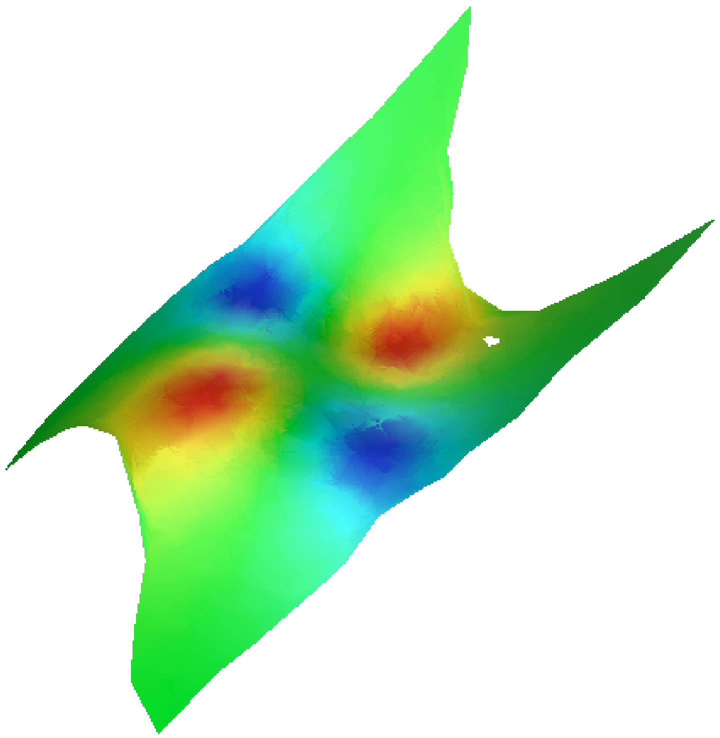
- 离散法：

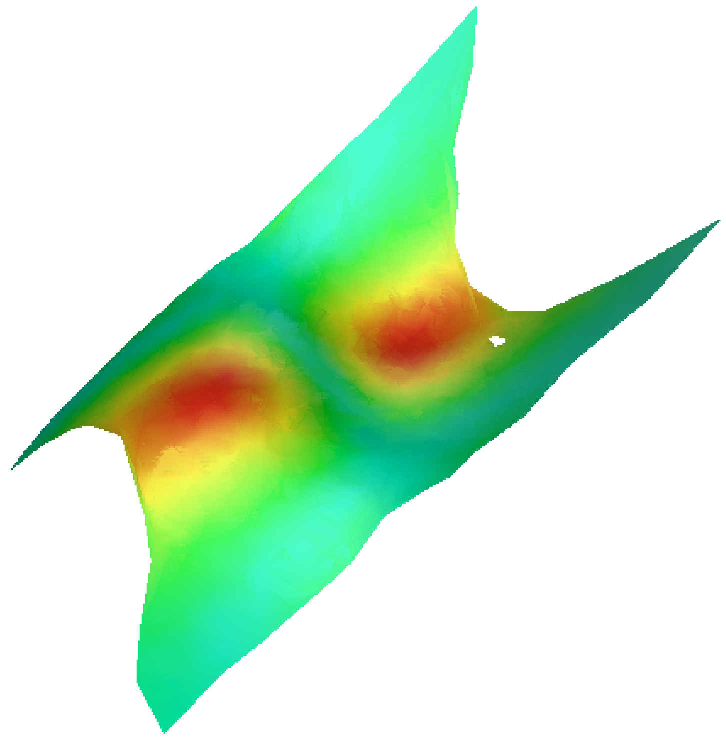
  - Taubin算法 [Taubin `95]
  - Chen & Schmitt算法 [Chen & Schmitt `92]
  - Watanabe算法 [Watanabe & Belyaev `01]

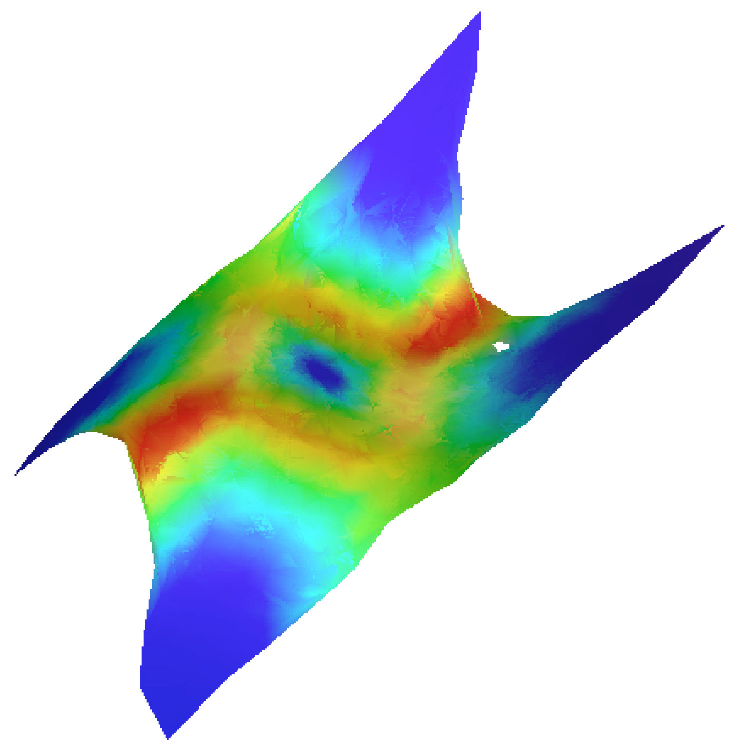
# 结果（1）

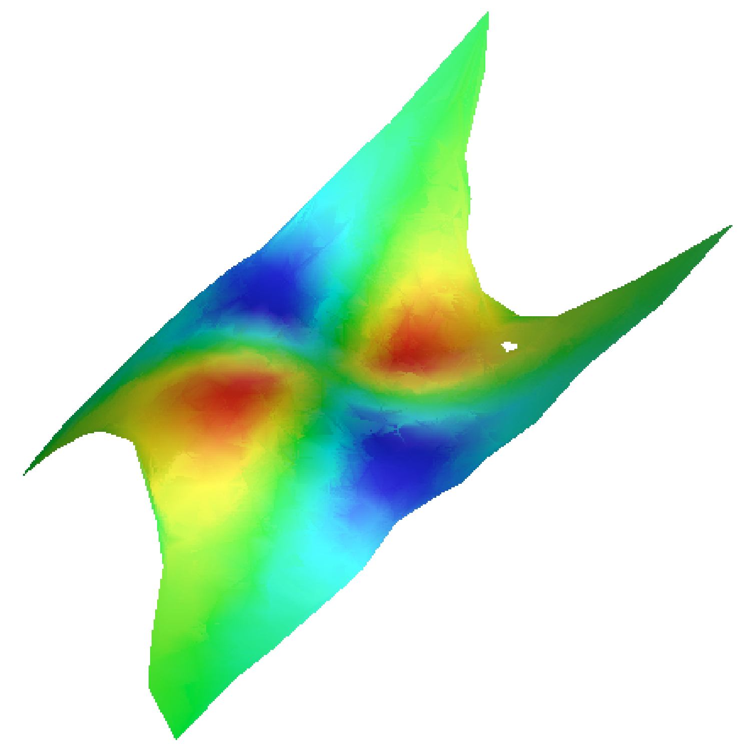
各种曲率的显示：

(1)高斯曲率，(2)平均曲率，(3)最大曲率，(4)最小曲率



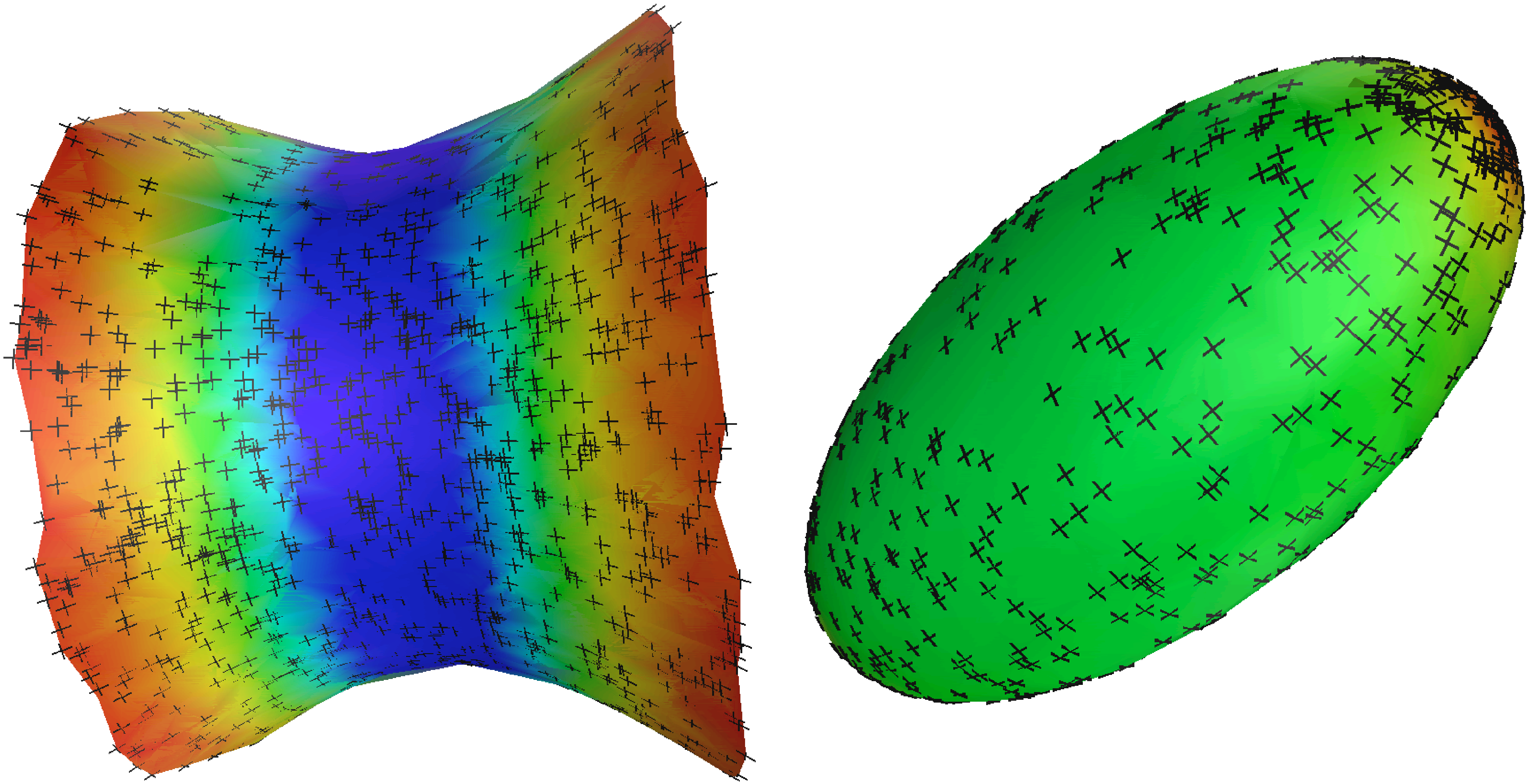




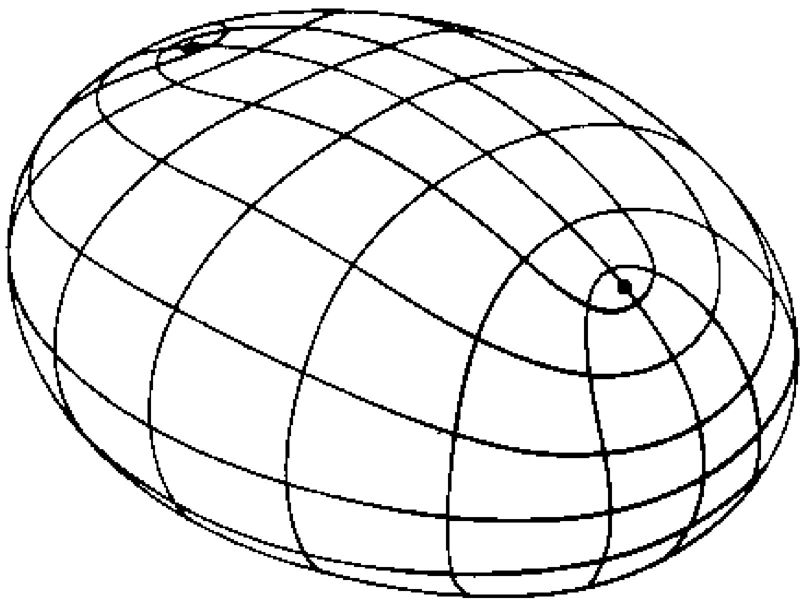


# 结果（2）

高斯曲率和曲率方向的显示

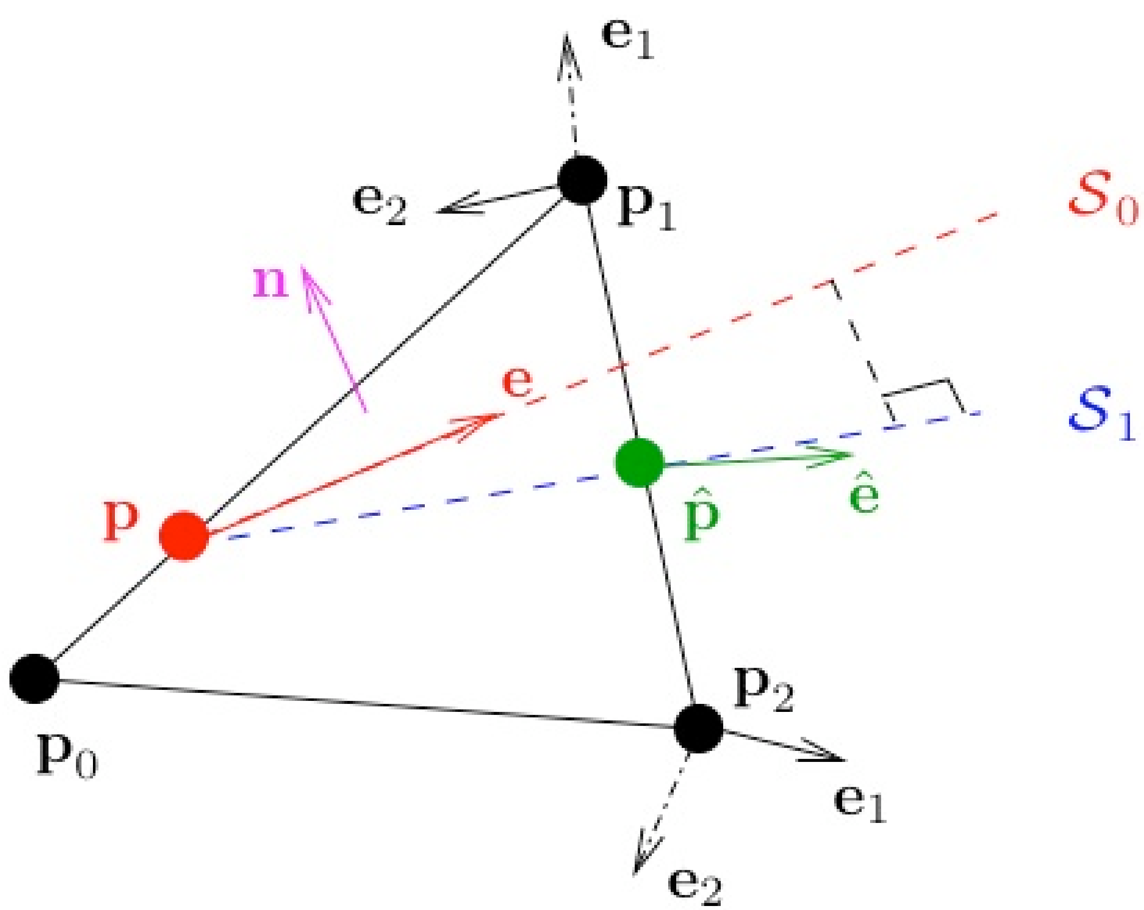


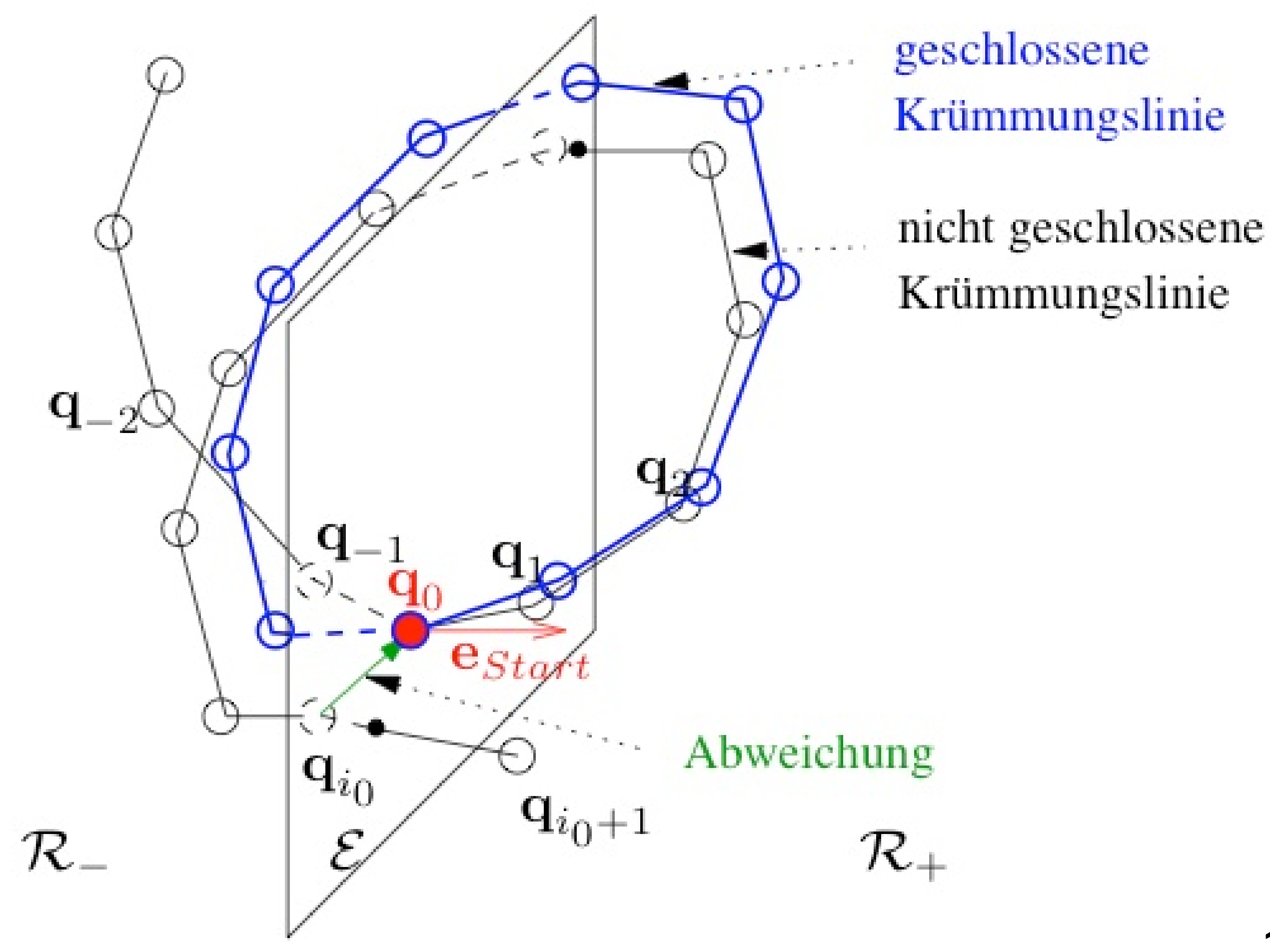
# 曲率线的绘制



曲率线：曲率方向，封闭性

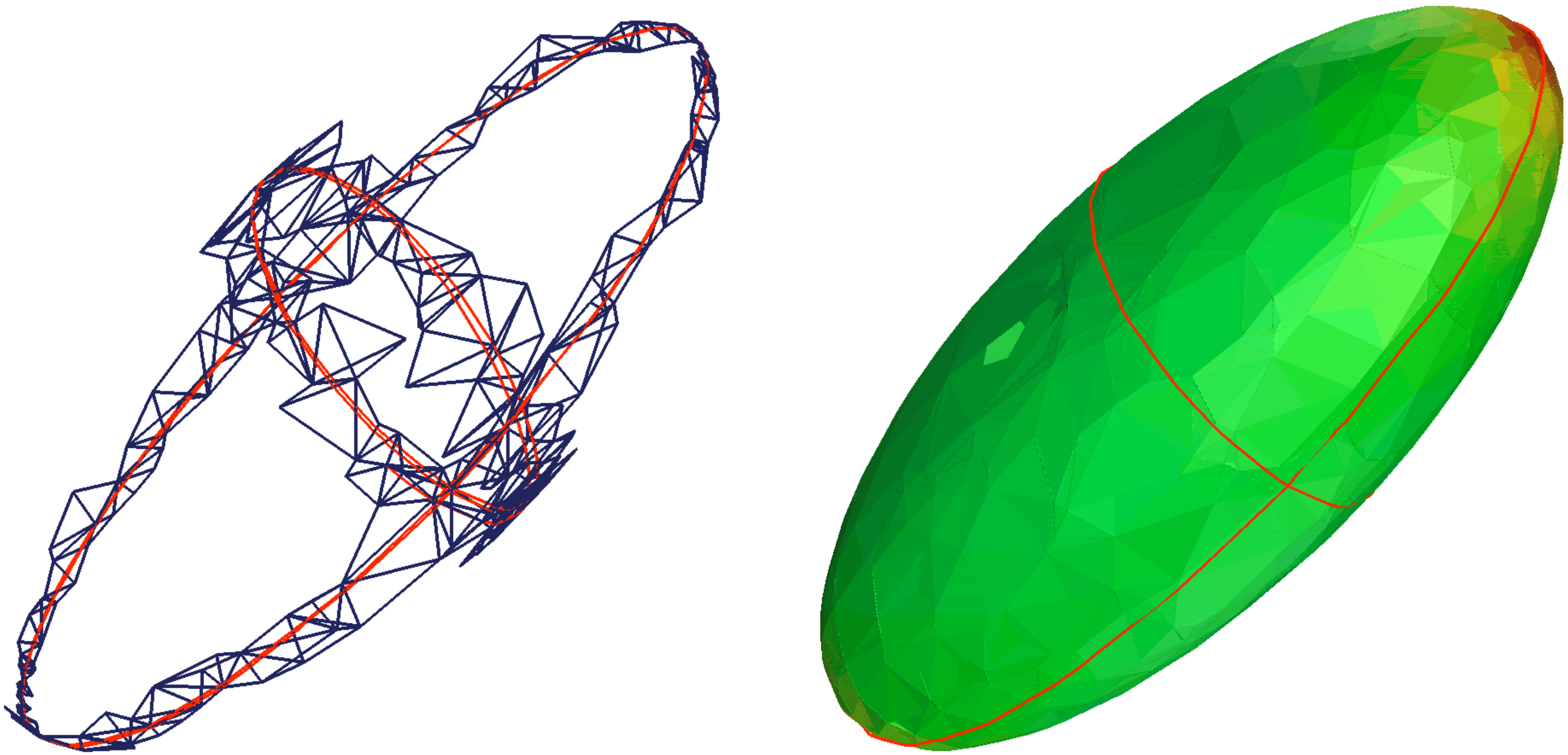
线性插值法＋等量修改法（确保曲率线的封闭性）



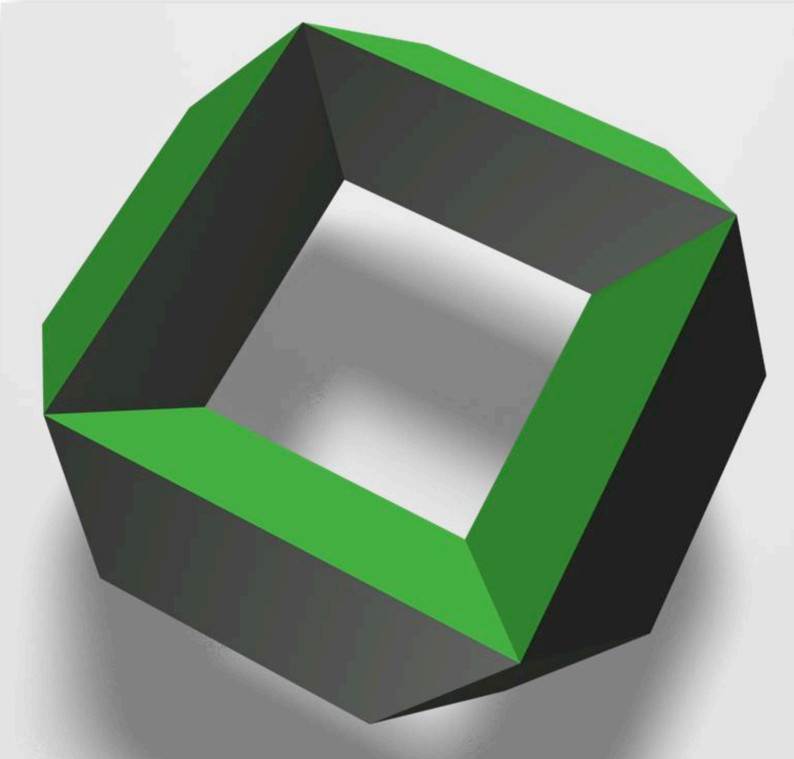



# 结果（3）

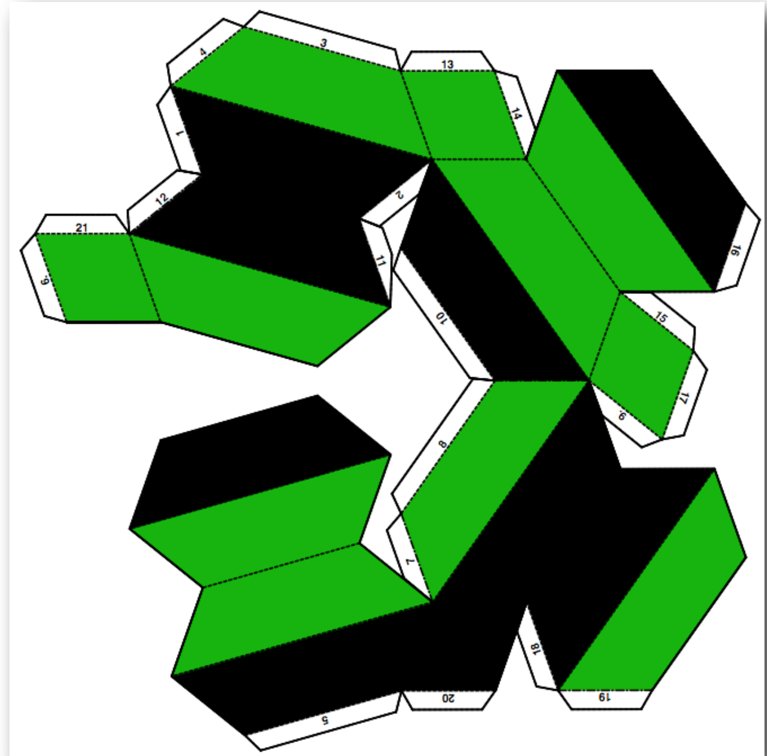
曲率线的显示



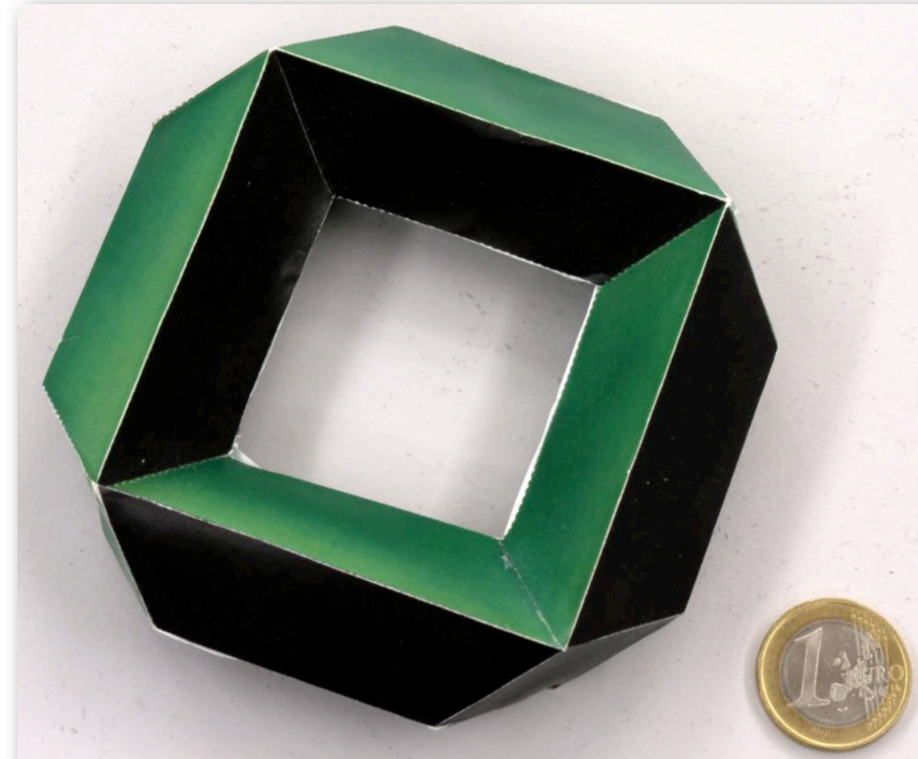
# 实例二：折纸模型



实物



裁剪图案



折纸模型

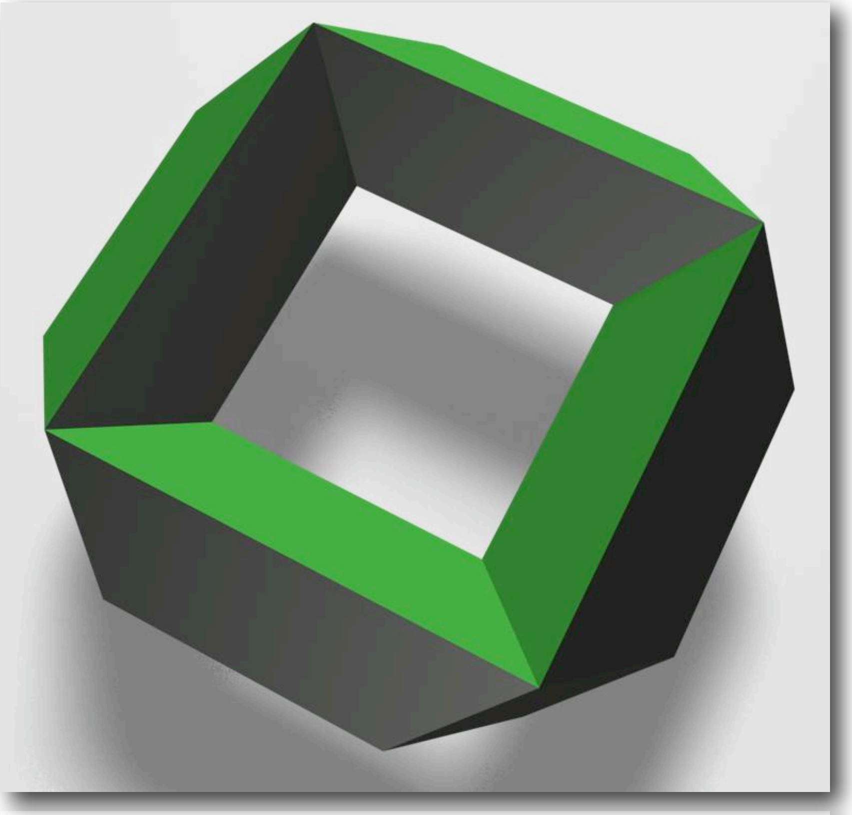
输入： 二维流形的 VRML(Virtual Reality Modeling Language)格式文件

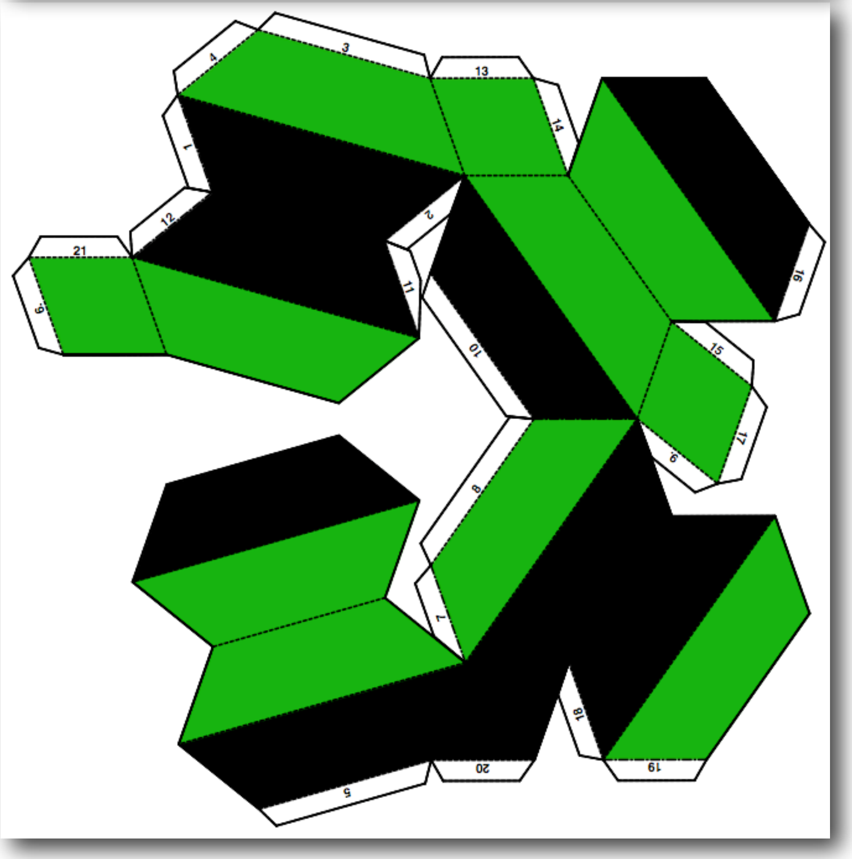
输出： 优化过的剪裁图案(PDF格式)，优化基于：
1、剪裁时间，2、剪贴的牢固性，3、节约用纸。

# 折纸模型的算法

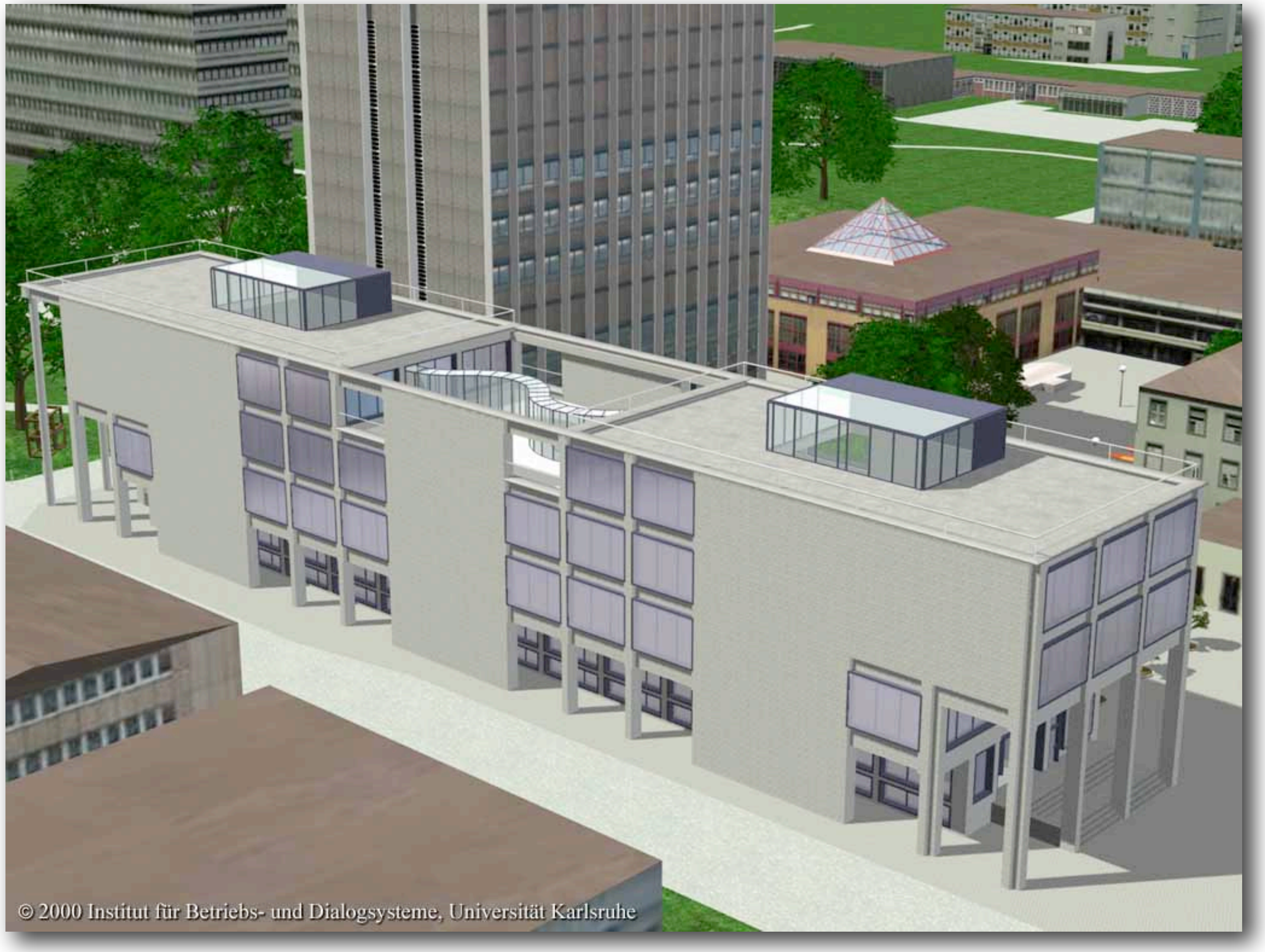
1. 将二维流形的网格模型平摊到一个平面上。
2. 分割模型，去除所有的自交情况。
3. 如果某一剪裁片不能放在一页纸中，继续分割该剪裁片。
4. 将所有的剪裁片无重叠地排放到尽量少的页面中。

在前三步步骤中同时计算粘贴片的大小。

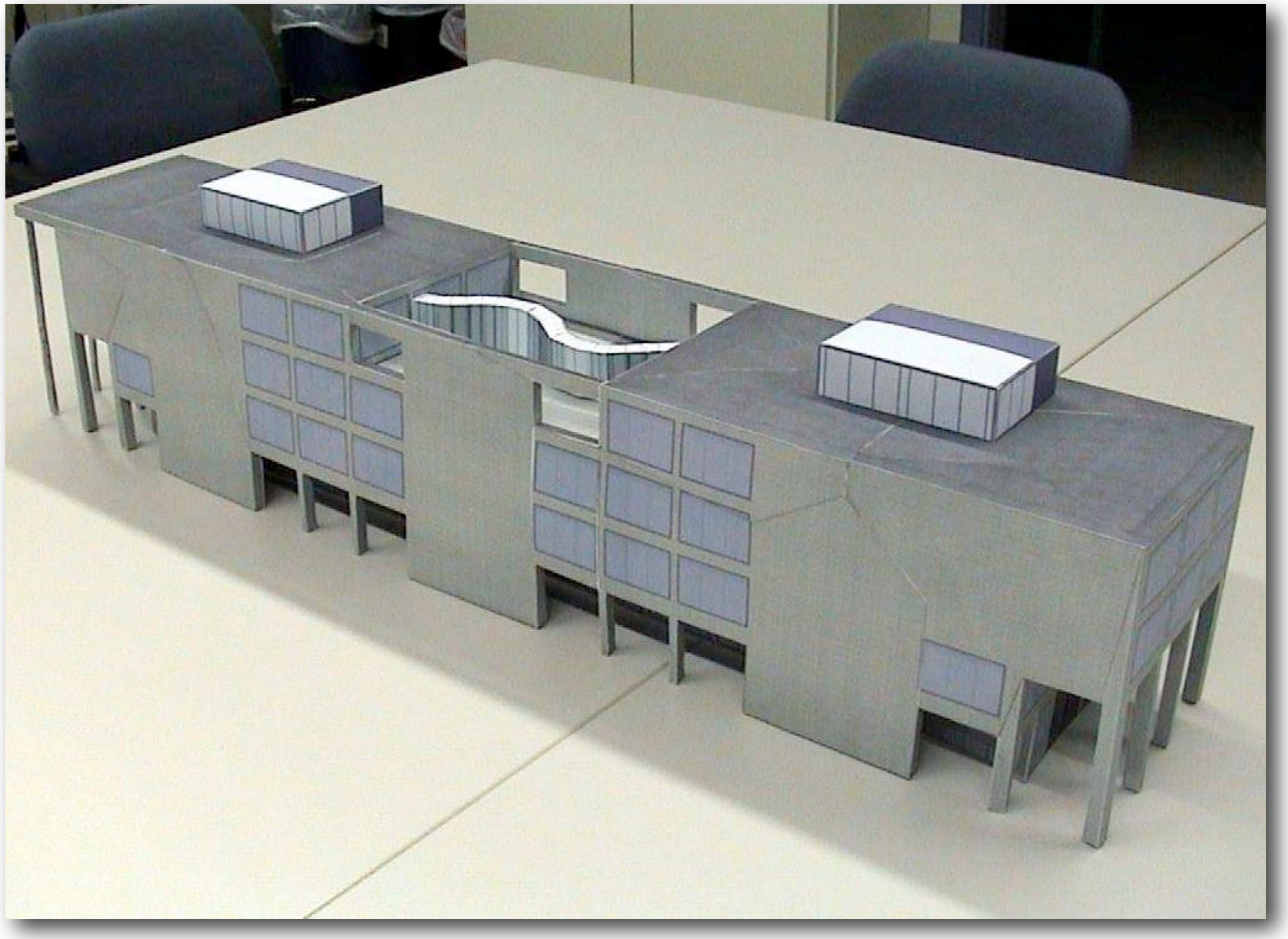




# 结果（1）：卡尔斯鲁厄大学图书馆

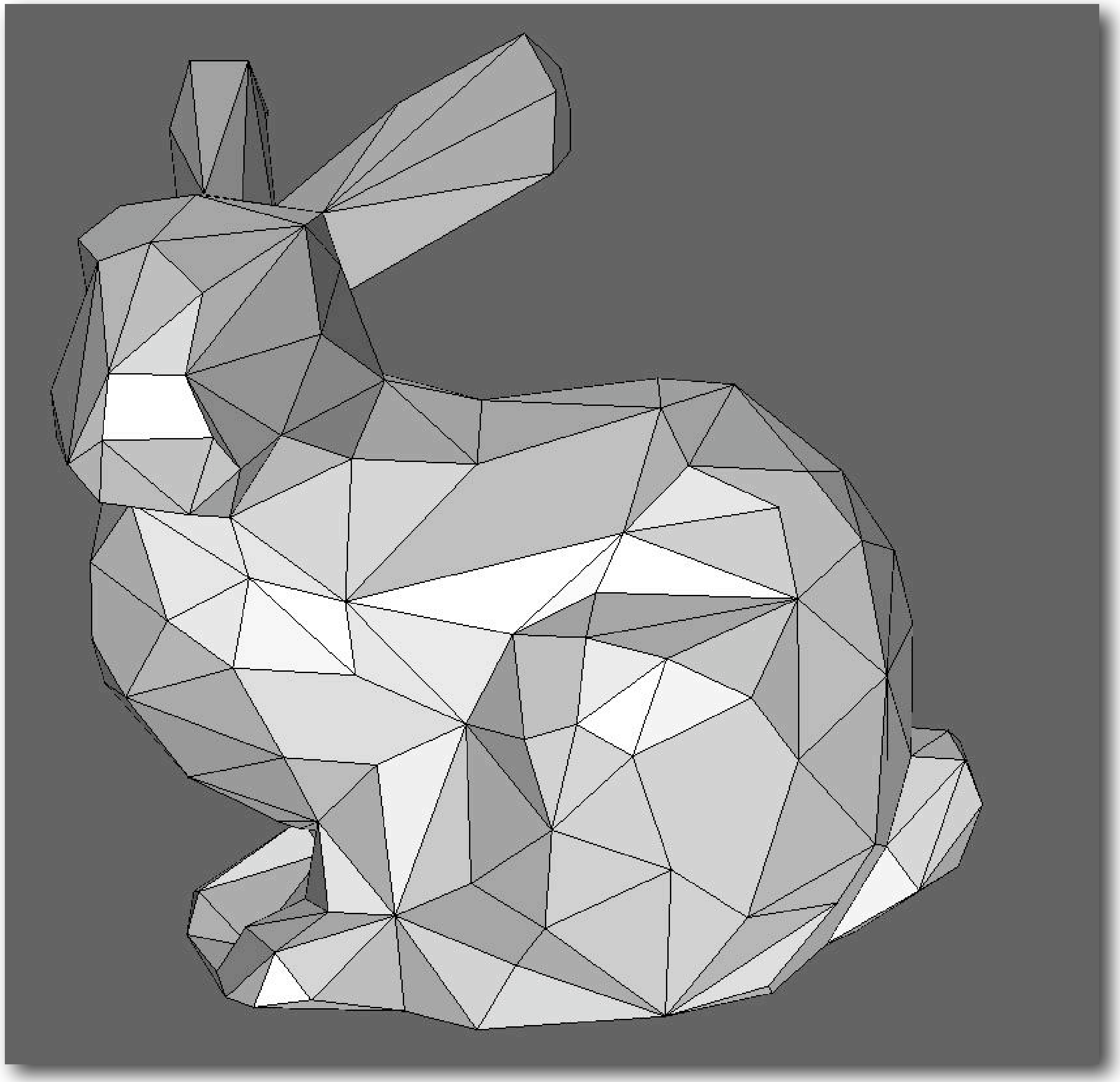



347个多边形



剪裁和粘贴耗时25小时

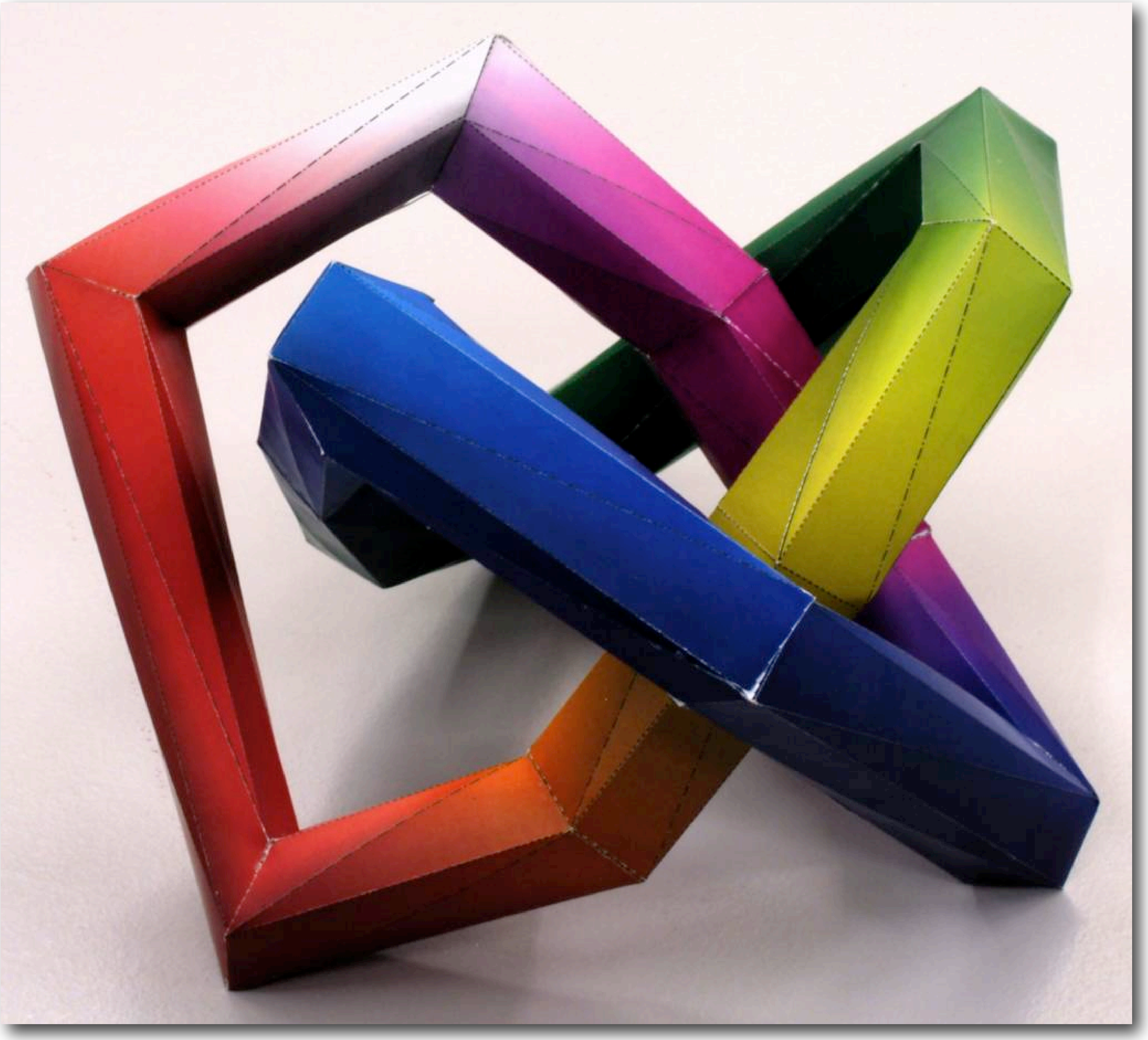
# 结果（2）：斯坦福大学的兔子模型



348个多边形

剪裁和粘贴耗时12小时

# 结果（3）：环面节，一个复杂的几何形体



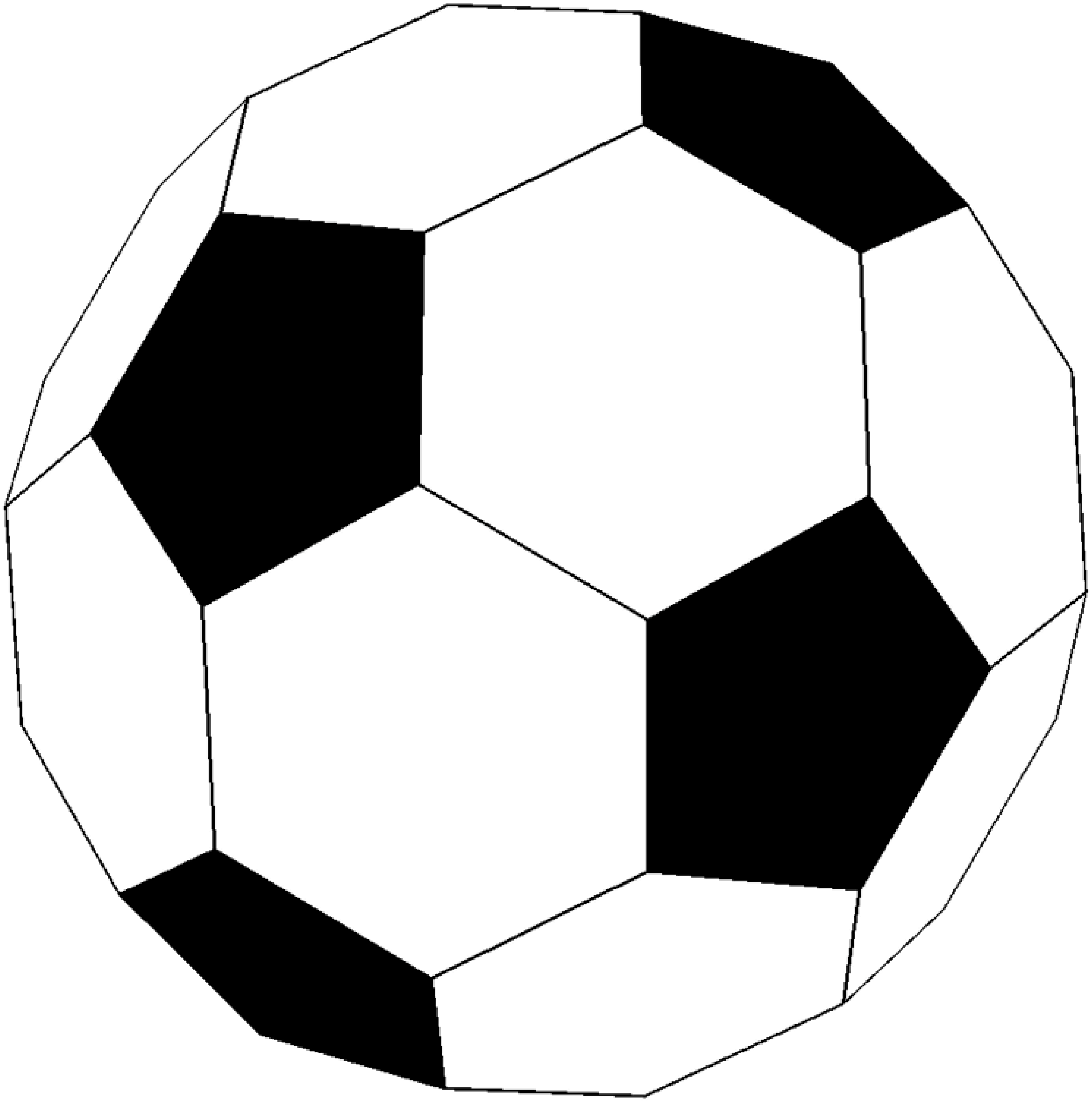
143个多边形

# 结果（4）：宇宙飞船

62个多边形

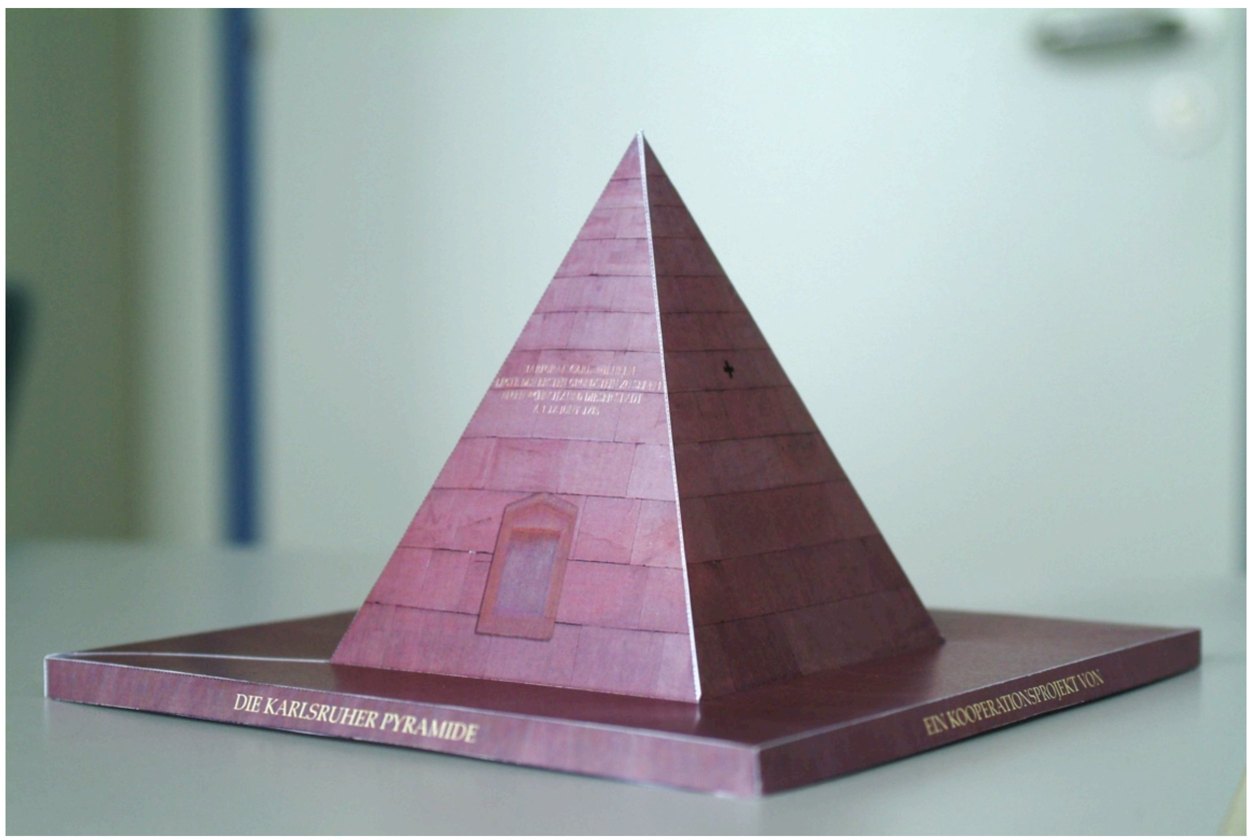
剪裁和粘贴耗时2小时

# 结果（5）：足球表面，一个封闭曲面



# 结果（6）：卡尔斯鲁厄的小金字塔

实物照片




折纸模型

# 研究方向和主要研究成果

- 研究方向
  - 计算机辅助几何造型，特别是网格细分算法
  - 计算机图形学
- 主要研究成果
  - 第一次证明了：任意阶的中点网格细分算法生成的曲面都是一阶连续可导的。（该结果在美国举行的第十届SIAM国际学术会议上进行了宣讲。）
  - 对常用的网格细分算法进行了优化和改进。

# ?

chenqi@ira.uka.de
http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/