小波分析介绍

徐景实
(湖南师范大学数学系，长沙， 410081)
E-mail: jshixu@yahoo.com.cn

§1 小波的发展历史

1, 小波变换的概念是由法国从事石油 (Elf Aquitaine) 信号处理的工程师 J.Morlet 在 1975 年首先提出的，通过物理的直观和信号处理的实际需要的经验建立了反演公式.

2, 数学基础： Calderón 表示定理的发现、 Hardy 空间的原子分解和无条件基的深入研究为小波变换的诞生做了理论上的准备，而且 J.O.Stromberg 还构造了历史上非常类似于现在的小波基.

3, 1986 年法国著名数学家 Y.Meyer 偶然构造出一个真正的小波基，并与 S.Mallat 合作建立了构造小波基的多尺度分析之后，小波分析才开始蓬勃发展起来.

4, 1988 年比利时女数学家 I.Daubechies 构造具有紧支集的, 正交, 正规, 连续小波函数. 她的《小波十讲》 (Ten Lectures on Wavelets) 对小波的普及起了重要的推动作用.

§2 小波的优点

小波变换与 Fourier 变换、窗口 Fourier 变换 (Gabor 变换) 相比，它是一个时间和频率的局域变换，因而能有效的从信号中提取信息，通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析 (Multiresolution Analysis)，解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题．从而小波变化被誉为“数学显微镜”．

§3 小波的应用

小波分析的应用领域十分广泛，它包括：

1, 数学领域的应用：用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等

2, 量子力学、理论物理．

3, 小波分析用于信号与图象：如计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地震勘探数据处理；大型机械的故障诊断等方面；信号分析方面的滤波、去噪声、压缩、传递等．在图象处理方面的图象压缩、分类、识别与诊断，去污等；在医学成像方面的减少 B 超、 CT 、核磁共振成像的时间，提高分辨率等．

4, 在工程技术等方面的应用．包括计算机视觉、计算机图形学、曲线设计、湍流、远程宇宙的研究与生物医学方面．

5, 军事上：电子对抗与武器的智能化．

§4 小波变换

设 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 是小波母函数，则小波为

$$a > 0,\ b \in \mathbb{R}, \phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\phi(\frac{t-b}{a}),$$

其中 a 称为尺度， b 称为位移.

设 $x \in L^2(\mathbb{R})$, 则小波变换

$$WT_x(a,b) =< x, \phi_{a,b} >= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\phi}(\frac{t-b}{a})dt.$$

ϕ 称为容许的，若

$$C_\phi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\phi}(\omega)|}{\omega}d\omega < \infty,$$

这里 $\widehat{\phi}(\omega)$ 表示 ϕ 的 Fourier 表换，即

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-it\omega}dt.$$

当 ϕ 是容许的，则对 $x \in L^2(\mathbb{R})$,

$$x(t) = \frac{1}{C_\phi}\int_0^\infty a^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} WT_x(a,b)\phi_{a,b}(t)dadb.$$

在实际应用分析时，如果要分析高频，应选择小的 a, 分析低频时要选择大的 a.

f 的 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}dt.$$

f 的 Fourier 窗口变换为

$$Sf(u,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t-u)e^{-it\xi}dt,$$

g 称为窗口函数.

§4.1 常用的几个小波变换

1， Morlet 小波,

$$\Psi_\sigma(t)=c_\sigma\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}t^2}(e^{i\sigma t}-\kappa_\sigma)$$

这里 $\kappa_\sigma=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}$ 是由容许条件所决定的，规范常数 c_σ 为

$$c_\sigma=\left(1+e^{-\sigma^2}-2e^{-\frac{3}{4}\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Morlet 小波的 Fourier 变换为：

$$\hat{\Psi}_\sigma(\omega)=c_\sigma\pi^{-\frac{1}{4}}\left(e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\omega)^2}-\kappa_\sigma e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\right)$$

中心频率 ω_Ψ 是 $\hat{\Psi}_\sigma(\omega)$ 的最大值点，它满足：

$$(\omega_\Psi-\sigma)^2-1=(\omega_\Psi^2-1)e^{-\sigma\omega_\Psi}$$

参数 σ 可以用来调整时间和频率的分辨率. 通常，取 $\sigma>5$(小的 σ 有高的时间分辨率). 当 $\sigma>5$, $\kappa_\sigma<10^{-5}$ 此时 $\omega_\Psi\simeq\sigma$.

2， Mexican 帽子小波

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(1-\frac{t^2}{\sigma^2}\right)e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

是正态分布 Gaussian 函数的二阶导数.

3，复 Mexican 帽子小波

$$\hat{\Psi}(\omega)=\begin{cases}2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}\omega^2e^{-\frac{1}{2}\omega^2} & \omega\geq 0\\ 0 & \omega\leq 0\end{cases}.$$

也就是

$$\Psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\pi}(1-t^2)e^{-\frac{1}{2}t^2}-\left(\sqrt{2}it+\sqrt{\pi}\mathrm{erf}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}t\right]\left(1-t^2\right)e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)\right)$$

这里误差函数 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

此小波是由 Addison 等人在 2002 年提出.

§4.2 离散小波变换

函数 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ 被称为一个正交小波，若 $\{\psi_{jk}:j,k\in\mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Hilbert 基，这里

$$\psi_{jk}(t)=2^{j/2}\psi(2^jt-k)\quad j,k\in\mathbb{Z}.$$

$$\langle\psi_{jk},\psi_{lm}\rangle=\delta_{jl}\delta_{km}$$

$\delta_{jl}=1$ 当 $j=l$, 其它都为 0. $\langle f,g\rangle$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的内积，即

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}g(t)dt.$$

完备性即是要求任意函数 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 可以被展成

$$f(t)=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}c_{jk}\psi_{jk}(t)$$

则小波系数 c_{jk} 为

$$c_{jk} = < f, \psi_{jk}(t) > .$$

参考文献

[1] P. S. Addison, J. N. Watson and T. Feng, Low-Oscillation Complex Wavelets, The Journal of Sound and Vibration, 254, 2002, 733-762.

[2] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM 1992

[3] D. B. Percival, A. T. Walden, Wavelet methods for time series analysis, Cambridge: Cambridge Univ. Pr., 2000.